

### Compito di Matematica per la Fisica

Silvia Penati, Carlo Oleari

25/6/2013

1. Calcolare modulo e fase dei seguenti numeri complessi e disegnarli su di un piano complesso

- $\log(3 - 2i)$
- $(1 + i)^{1+i}$

2. Calcolare il seguente integrale

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{\delta(1 - x - y - z)}{(2x + y + z)^3}$$

3. Calcolare, utilizzando la teoria dei residui e motivando il procedimento, il seguente integrale

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{\sqrt{2}-1}}{1+x^2}$$

4. Data la funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z+a) \tan \frac{z}{2}}, \quad a \in \mathbb{C}$$

- Si identifichino e si classifichino tutti i punti singolari (non dimenticare la discussione del punto all'infinito) al variare del parametro complesso  $a$ .
- Si calcolino i residui nei punti singolari.

5. Si consideri l'operatore  $A : l^2(\mathbb{C}) \rightarrow l^2(\mathbb{C})$  così definito

$$A\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\} = \{a_2, 0, a_4, 0, \dots\}$$

- Verificare che l'operatore è ben definito in  $l^2(\mathbb{C})$ .
- Verificare che è limitato e calcolarne la norma.
- L'operatore è invertibile? Se sì, determinare  $A^{-1}$ .
- Costruire  $A^\dagger$  e  $A^2$ .
- Determinare lo spettro puntuale.